CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX - a

Problema 1.
Calculați $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{2018}]$.

SOLUȚIE:

Fie $k\in\mathbb{N}^*$ și $x\in\mathbb{N}$ astfel încât $k^2\le x<(k+1)^2 \Rightarrow k\le\sqrt{x}<k+1\Rightarrow$ 1p
$\Rightarrow [\sqrt{x}]=k, \forall x\in\{k^2,k^2+1,k^2+2,\dots,k^2+2k\}$ 1p
$\text{card}(\{k^2,k^2+1,k^2+2,\dots,k^2+2k\})=2k+1$ 1p
$1936=44^2<2018<45^2=2025\Rightarrow[\sqrt{x}]=44, \forall x\in\{1936,1937,\dots,2018\}$ 1p
$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{2018}]=\sum_{k=1}^{43}k(2k+1)+44(2018-1936+1)$ 1p
$=\sum_{k=1}^{43}(2k^2+k)+3652=2\sum_{k=1}^{43}k^2+\sum_{k=1}^{43}k+3652$ 1p
$=2\cdot\frac{43\cdot44\cdot87}{6}+\frac{43\cdot44}{2}+3652=54868+946+3652=59466$ 1p

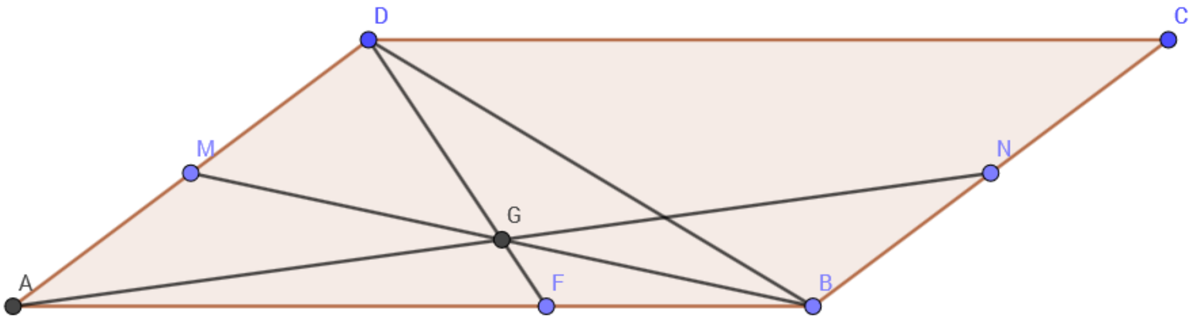
Problema 2.
Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax-3a$, unde $a\in\mathbb{R}$.
a) Demonstrați că dacă $x,y\in\mathbb{R}$ și $x\cdot y=3(x+y)$, atunci $(x-3)(y-3)=9$.
b) Știind că rădăcinile ecuației $f(x)=0$ sunt două numere întregi distincte, determinați valorile lui a.

SOLUȚIE:

a) $x\cdot y=3(x+y)\Rightarrow xy-3x-3y=0$ 1p
$(x-3)(y-3)=xy-3x-3y+9=0+9=9$ 1p
b) Fie $x_1,x_2\in\mathbb{Z}, x_1<x_2$, cele două rădăcini ale ecuației $f(x)=0$.
Se scriu relațiile lui Viète: $x_1+x_2=-a$, $x_1\cdot x_2=-3a$ 1p
Se observă că $x_1\cdot x_2=3(x_1+x_2)$ 1p
Folosind subpunctul **a)** se obține $(x_1-3)(x_2-3)=9$. Cum $x_1-3<x_2-3$ și $x_1-3, x_2-3\in\mathbb{Z}\Rightarrow$
$\Rightarrow(x_1-3;\ x_2-3)\in\{(-9;-1),(1;9)\}\Rightarrow(x_1;x_2)\in\{(-6;2),(4;12)\}$ 2p
Prin urmare, $a\in\{-16;4\}$ 1p

Problema 3.
În paralelogramul $ABCD$ se consideră $F\in[AB]$, $M-$ mijlocul segmentului $[AD]$, $N-$ mijlocul segmentului $[BC]$, $G-$mijlocul segmentului $[BM]$, iar $AF=2FB$.
a) Demonstrați că punctele D,G,F sunt coliniare.
b) Demonstrați că $\overrightarrow{DG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DF}$.

SOLUȚIE:



a) În ΔBAM calculăm $\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AD}{DM}\cdot\frac{MG}{GB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}=1$ 2p

Conform Teoremei lui Menelaus, punctele F, G, D sunt coliniare 2p

b) $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$ 1p

$\overrightarrow{DF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DG}+\frac{2}{3}\overrightarrow{GB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DG}+\frac{2}{3}\overrightarrow{GM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DG}+\frac{2}{3}\overrightarrow{GB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{DG}\Rightarrow\overrightarrow{DG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DF}$ 2p

Problema 4.

La ora 6:00, din același depozit A, pleacă doi curieri către alte două depozite B și C, unde distanța de la A la B este egală cu distanța de la B la C și egală cu distanța de la A la C. Primul curier merge mai întâi la depozitul B, cu o viteză constantă x km/h, iar de la depozitul B la depozitul C merge cu o viteză de 3 ori mai mare. Al doilea curier merge mai întâi la depozitul C, cu o viteză constantă de 30 km/h, iar de la depozitul C la depozitul B merge cu o viteză constantă de $x+42$ km/h. Știind că nici unul nu face pauză, iar ambii ajung la destinație la ora 9:00, determinați ora aproximativă la care s-au întâlnit cei doi curieri pe traseu.

SOLUȚIE:

Notăm cu d, distanța dintre oricare două depozite.

Avem că $\frac{d}{x}+\frac{d}{3x}=\frac{d}{30}+\frac{d}{x+42}$, adică $x=28$ km/h 2p

Primul curier va ajunge la depozitul B la ora 8:15 .... 1p

Al doilea curier va ajunge la depozitul C la ora 8:06 .... 1p

Distanța dintre două localități este 63 km 1p

Notăm cu t, ora întâlnirii celor doi curieri. Obținem că $\left(t-8\frac{1}{4}\right)\cdot 84+\left(t-8\frac{1}{10}\right)\cdot 70=63$ 1p

Soluția ecuației este $t\cong 8.59$, adică ora întâlniri celor doi curieri este 8:35 .... 1p

<u>Notă.</u> Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X – a

Problema 1.

Studiind virusul gripal tip B, un cercetător a stabilit că acesta se răspândeşte după legea $f(t)=1-e^{-0,5t}$, unde *f(t)* reprezintă procentul din populaţie care a venit în contact cu boala, iar *t* este numărul de săptămâni trecute de la semnalarea primului caz. În a câta săptămâna va fi infectată trei sferturi din populaţie?

SOLUŢIE:

$\frac{3}{4}=1-e^{-0,5t} \Rightarrow e^{-0,5t}=\frac{1}{4}$ 3p

$-0,5t=\ln\frac{1}{4} \Rightarrow t=4\ln 2$ 2p

$t=\ln 16$, $\ln e^2<\ln 16<\ln e^3$ 1p

în a treia săptămâna 1p

Problema 2.

Fie numărul $a=\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$.

a) Verificați relația $a^3=18a+108$

b) Arătați că $a\in\mathbb{Q}$

SOLUŢIE:

a) Verificarea relației 3p

b) $a^3-18a-108=0 \Leftrightarrow (a-6)(a^2+6a+18)=0$ 2p

$a^2+6a+18=(a+3)^2+9>0\ \forall a\in\mathbb{R}$ 1p

$a=6$ soluție unică 1p

Problema 3.

Fie $x_i\in[10,100]$, $i=\overline{1,10}$.

Să se arate ca $(\lg x_1+\lg x_2...+\lg x_{10})(\log_{x_1}10+\log_{x_2}10+...+\log_{x_{10}}10)\le 112,5$

SOLUŢIE:

$x_i\in[10,100]\Rightarrow \lg x_i\in[1,2]$ 1p

funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R}, f(t)=t^2-3t+2, f(t)\le 0$,deci $t+\frac{2}{t}\le 3$ 2p

$\lg x_i + 2\log_{x_i} 10 \le 3$, i=$\overline{1,10}$ 1p

daca $S_1=\sum_1^{10}\lg x_i$ si $S_2=\sum_1^{10}\log_{x_i}10$, $S_1+2S_2\le 30$, $S_1+2S_2\ge 2\sqrt{S_1\cdot 2S_2}$ 2p

finalizare 1p

Problema 4.

Se da funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$, $f(n)=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

a) Arătați ca f este periodica.

b) Calculați $(1-f(1))\cdot(1+f(2))\cdot(1-f(3))\cdot\ldots\cdot(1+f(2018))$

SOLUȚIE:

a) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6=1$ 1p

$f(n+6)=f(n), \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow$ f periodică 2p

b) Fie $f(1)=\alpha$, $\alpha^3=-1, \alpha^2-\alpha+1=0$ 1p

$(1-\alpha)(1+\alpha^2)(1-\alpha^3)\ldots(1+\alpha^{2018})$ 1p

$\left(-\alpha^2\cdot\alpha\cdot 2\right)^{672}\cdot(-\alpha^2\cdot\alpha)$ ....
.. 1p

finalizare 2^{672} 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI - a

Problema 1.

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to[-1,+\infty)$, $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+a, & x\le 1 \\ x+2, & x>1 \end{cases}$.

a) Demonstraţi că $a\ge 0$.
b) Pentru $a=0$, trasaţi graficul funcţiei.
c) Arătaţi că funcţia *f* este continuă dacă şi numai dacă este surjectivă.

SOLUŢIE:

a) Valoarea minimă a restricţiei funcţiei la intervalul $(-\infty,1]$ este $f(-1)=a-1$. Această valoare minimă trebuie să fie cel puţin egală cu -1, prin urmare $a\ge 0$. 2p
b) Graficul este format dintr-o semidreaptă şi o porţiune de parabolă, care vor fi trasate. 2p
c) Funcţia *f* este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă este continuă în $x_0=1$, condiţie care revine la faptul că $a=0$. Pe de altă parte, *f* este surjectivă dacă şi numai dacă $f(-1)=-1$, adică, din nou, $a=0$. 3p

Problema 2.

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Determinaţi matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $XA=AX$.

b) Rezolvaţi în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ecuaţia $X^3=A$.

SOLUŢIE:

a) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a,b,c,d\in\mathbb{C}$; atunci $XA=\begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$ şi $AX=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$.

Ipoteza $XA=AX$ este îndeplinită dacă şi numai dacă $a=d$ şi $b=c$, deci matricele căutate sunt cele de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{C}$. 2p

b) Dacă $X^3=A$, atunci $XA=X^4=AX$, prin urmare *X* este de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{C}$.

Obţinem că $a^3+3ab^2=1, 3a^2b+b^3=1$ 2p

Scăzând aceste două relaţii, deducem că $(a-b)^3=0$, prin urmare $a=b$. 1p

Atunci $a^3 = \frac{1}{4}$, de unde $a \in \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\varepsilon, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\varepsilon^2 \right\}$, $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

În concluzie, găsim trei soluţii ale ecuaţiei matriceale. 2p

Problema 3.

Determinaţi ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{x^2+1}$.

SOLUŢIE:

Observăm că $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = +\infty$, prin urmare dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta pentru graficul funcţiei *f*. 2p

Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, nu există asimptote orizontale la graficul funcţiei *f*. 1p

Avem că: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$, iar $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+1} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} + \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}\right) = 0 + 1 = 1$; rezultă că dreapta de ecuaţie $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru graficul funcţiei *f*. 2p

Analog se arată că dreapta de ecuaţie $y = -x - 1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ pentru graficul funcţiei *f*.
.... 2p

Problema 4.

Matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ are determinantul egal cu 1.

a) Schimbând între ele două dintre elementele lui *A*, putem obţine o matrice *B* al cărei determinant să fie egal cu 0?
b) Schimbând între ele două dintre elementele lui *A*, putem obţine o matrice *C* al cărei determinant să fie egal cu -1?
c) Schimbând între ele două dintre elementele lui *A*, putem obţine o matrice *D* al cărei determinant să aibă o altă valoare decât 0, 1 sau -1?

SOLUŢIE:

Notăm, ca de obicei, cu a_{ij} elementul din matricea *A* situat la intersecţia liniei *i* cu coloana *j*.

a) Da: schimbăm între ele elementele a_{12} şi a_{22}. 2p

b) Da: schimbăm între ele elementele a_{11} şi a_{31}. 2p

c) Nu: dacă cele două zerouri sunt pe aceeaşi linie sau pe aceeaşi coloană, determinantul matricei *D* va fi egal cu 0 (vor exista două linii/coloane identice); dacă cele două zerouri se află pe linii şi coloane diferite, determinantul matricei *D* va fi egal cu 1 sau -1 (în dezvoltarea determinantului, trei dintre cele şase produse vor fi egale cu 0, iar celelalte trei vor fi egale cu 1 şi nu pot avea toate trei acelaşi semn). 3p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Ştiințe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ construim legile de compoziție * și $\circ$ definite prin: $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12,\ x, y \in \mathbb{Z}$

a) Justificați că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este inel comutativ.

b) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{\text{de 2018 ori } x} = 2^{2018} + 3$.

c) Să se afle $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât intre inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ şi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = ax + b$.

SOLUŢIE:

a) Verificarea axiomelor inelului comutativ 3p

b) $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ 1p

$\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{\text{de 2018 ori } x} = (x-3)^{2018} + 3 = 2^{2018} + 3$ 1p

Află $x \in \{1, 5\}$ 1p

c) $a = 1$ şi $b = -3$ şi justificarea izomorfismului între $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ şi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 1p

Problema 2.

Fie $\mathcal{M}$ mulțimea secvențelor de 8 litere majuscule din alfabetul latin (care are 26 de litere: A, B, C, ..., Z). Definim pe $\mathcal{M}$ legea de compoziție # astfel: dacă $x = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7\lambda_8 \in \mathcal{M}$ şi $x = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5\gamma_6\gamma_7\gamma_8 \in \mathcal{M}$, atunci $x \# y = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\gamma_6\gamma_7\gamma_8$.

a) Aflați cardinalul mulțimii $\mathcal{M}$.

b) Calculați (PARAGUAY # COLUMBIA) # BRAZILIA

c) Cercetați dacă legea # este comutativă și dacă admite element neutru.

SOLUŢIE:

a) card $\mathcal{M} = 26^8$ 3p

b) (PARAGUAY # COLUMBIA) # BRAZILIA = PARAGBIA # BRAZILIA = PARAGLIA 2p

c) Legea # nu este comutativă , (de exemplu AAAAAALL # SSSSSSSB = AAAAASSB şi SSSSSSSB # AAAAAALL = SSSSSALL) 1p

Evident legea # nu admite element neutru 1p

Problema 3.

a) Arătați că: $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx = \frac{1}{2}arctg\left(e^{2x}\right)+C$

b) Aflați primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\left(1+e^{x}\right)^{4}}{1+e^{4x}}$

(Nicolae Sanda – Supliment G.M.)

SOLUȚIE:

a) Justificarea corectă (de exemplu cu schimbarea de variabilă $t=e^{2x}$) 2p

b) $f(x)=\frac{\left(1+e^{x}\right)^{4}}{1+e^{4x}}=\frac{1+4e^{x}+6e^{2x}+4e^{3x}+e^{4x}}{1+e^{4x}}=1+6\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}+4\frac{e^{x}\cdot\left(1+e^{2x}\right)}{1+e^{4x}}$ 1p

$\int 1dx = x+C$ 1p

$4\int\frac{e^{x}\cdot\left(e^{2x}+1\right)}{e^{4x}+1}dx=\frac{4}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sqrt{2}}\right)+C$ (cu schimbarea de variabilă $t=e^{x}$) 2p

Finalizare $\int f(x)dx = x+3arctg\left(e^{2x}\right)+\frac{4}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sqrt{2}}\right)+C$ 1p

Problema 4.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și F o primitivă a sa.

Dacă $F(x)\cdot f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ și $F(0)=1$ să se afle f.

SOLUȚIE:

Din $F(x)\cdot f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ deduce că $\left(\frac{1}{2}F^{2}(x)\right)'=\left(\frac{1}{2}x^{2}\right)'$ 2p

$\frac{F^{2}(x)}{2}-\frac{x^{2}}{2}=k;\ \forall x\in\mathbb{R}$ 2p

Înlocuind $x=0$ deduce $\frac{1}{2}=k$ 1p

$F^{2}(x)=x^{2}+1\Rightarrow F(x)=\sqrt{x^{2}+1};\ \forall x\in\mathbb{R}$ 1p

Finalizare $f(x)=F'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{2}+1}};\ \forall x\in\mathbb{R}$ 1p